6. АДЈУНГОВАНИ ОПЕРАТОРИ, ЕРМИТСКИ ОПЕРАТОРИ

(6.1) Доказати важење ниже наведених *особина* адјунгованих оператора

(а) $(\hat{A}^\dagger)^\dagger = \hat{A}$;

(б) $(\hat{A}+\hat{B})^\dagger = \hat{A}^\dagger + \hat{B}^\dagger$;

(в) $\hat{0}^\dagger = \hat{0}$, $\hat{I}^\dagger = \hat{I}$;

(г) $(\alpha \hat{A})^\dagger = \alpha^* \hat{A}^\dagger$;

(д) $(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger$;

(ђ) $(\hat{A}^{-1})^\dagger = (\hat{A}^\dagger)^{-1}$, ако $\hat{A}$ има себи инверзан оператор: $\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{I}$;

(е) $(\hat{A}^m)^\dagger = (\hat{A}^\dagger)^m$, $\forall \hat{A}$; ако је $\hat{A}$ инверзни оператор, израз важи за свако цело m.

(а) Прво треба показати да је двапут адјунгован оператор једнак полазном оператору. Наравно, почиње се од дефиниције адјунгованог оператора

$$\left\langle v_1 \middle| \hat{A} v_2 \right\rangle = \left\langle \hat{A}^\dagger v_1 \middle| v_2 \right\rangle .$$

Сада треба узети у обзир прву особину скаларног производа, његову *ермитску симетрију*, по којој скаларни производ постаје комплексно коњугован када његови фактори измене места

$$\left\langle v_1 \middle| \hat{A} v_2 \right\rangle = \left\langle v_2 \middle| \hat{A}^\dagger v_1 \right\rangle^* .$$

Потом се, по дефиницији адјунгованог оператора, адјунговани оператор пребаци из другог фактора у први, што даје

$$\left\langle v_1 \middle| \hat{A} v_2 \right\rangle = \left\langle (\hat{A}^\dagger)^\dagger v_2 \middle| v_1 \right\rangle^* .$$

Након још једне примене ермитске симетрије, да би се изгубило комплексно коњуговање, следи

$$\left\langle v_1 \middle| \hat{A} v_2 \right\rangle = \left\langle v_1 \middle| (\hat{A}^\dagger)^\dagger v_2 \right\rangle .$$

Како су први фактори скаларног производа слева и здесна једнаки, могу се одбацити, па је

$$\hat{A}\left| v_2 \right\rangle = (\hat{A}^\dagger)^\dagger \left| v_2 \right\rangle .$$

Након одбацивања вектора $\left| v_2 \right\rangle$ на обе стране, остаје тражена операторска једнакост

$$\hat{A} = (\hat{A}^\dagger)^\dagger , \ \forall \left| v_1 \right\rangle, \left| v_2 \right\rangle .$$

(б) Сада треба показати да је адјунговани збир два оператора једнак збиру адјунгованих оператора. Адјунговани збир се постави у други фактор скаларног производа, па се пребаци у први фактор, применом дефиниције адјунгованог оператора

$$\left\langle v_1 \middle| (\hat{A}+\hat{B})^\dagger v_2 \right\rangle = \left\langle (\hat{A}+\hat{B}) v_1 \middle| v_2 \right\rangle .$$

Деловање збира два оператора на вектор своди се на збир појединачних деловања сваког оператора понаособ на тај вектор, те ће бити

$$\left\langle v_1 \middle| (\hat{A}+\hat{B})^\dagger v_2 \right\rangle = \left\langle \hat{A} v_1 + \hat{B} v_1 \middle| v_2 \right\rangle .$$

Како је скаларни производ *дистрибутиван* у односу на сабирање по првом фактору, следи

$$\left\langle v_1 \middle| (\hat{A}+\hat{B})^\dagger v_2 \right\rangle = \left\langle \hat{A} v_1 \middle| v_2 \right\rangle + \left\langle \hat{B} v_1 \middle| v_2 \right\rangle .$$

Потом се оператори пребаце из првог у други фактор у оба члана на десној страни израза

$$\left\langle v_1 \middle| (\hat{A}+\hat{B})^\dagger v_2 \right\rangle = \left\langle v_1 \middle| \hat{A}^\dagger v_2 \right\rangle + \left\langle v_1 \middle| \hat{B}^\dagger v_2 \right\rangle .$$

Будући да је скаларни производ дистрибутиван у односу на сабирање по другом фактору, биће

$$\left\langle v_1 \middle| (\hat{A}+\hat{B})^\dagger v_2 \right\rangle = \left\langle v_1 \middle| (\hat{A}^\dagger + \hat{B}^\dagger) v_2 \right\rangle .$$

Могу се одбацити први фактори скаларног производа с обе стране будући да су једнаки, па је

$$(\hat{A}+\hat{B})^\dagger \left| v_2 \right\rangle = (\hat{A}^\dagger + \hat{B}^\dagger) \left| v_2 \right\rangle .$$

Након одбацивања вектора $\left| v_2 \right\rangle$ слева и здесна остаје тражена операторска једнакост

$$(\hat{A}+\hat{B})^\dagger = \hat{A}^\dagger + \hat{B}^\dagger , \ \forall \left| v_1 \right\rangle, \left| v_2 \right\rangle .$$

(в) Да ли су нулти оператор и јединични оператор адјунговани? Полази се од дефиниције адјунгованог оператора за оба случаја

$$\left\langle v_1 \middle| \hat{0}^\dagger v_2 \right\rangle = \left\langle \hat{0}\, v_1 \middle| v_2 \right\rangle \quad \text{и} \quad \left\langle v_1 \middle| \hat{I}^\dagger v_2 \right\rangle = \left\langle \hat{I} v_1 \middle| v_2 \right\rangle .$$

Нулти оператор преводи сваки вектор у нулти вектор, док јединични оператор сваки вектор оставља непромењеним; следи

$$\left\langle v_1 \middle| \hat{0}^\dagger v_2 \right\rangle = \left\langle 0 \middle| v_2 \right\rangle \quad \text{и} \quad \left\langle v_1 \middle| \hat{I}^\dagger v_2 \right\rangle = \left\langle v_1 \middle| v_2 \right\rangle .$$

Скаларни производ нултог вектора и било ког вектора једнак је нули, а та нула се може представити и као скаларни производ произвољног вектора и нултог

$$\left\langle v_1 \middle| \hat{0}^\dagger v_2 \right\rangle = \left\langle v_1 \middle| 0 \right\rangle \quad \text{и} \quad \left\langle v_1 \middle| \hat{I}^\dagger v_2 \right\rangle = \left\langle v_1 \middle| v_2 \right\rangle .$$

Како се нулти вектор добија деловањем нултог оператора на било који вектор, он се може написати и као деловање нултог оператора на други вектор. Такође, јединични оператор оставља сваки вектор непромењеним, па се други вектор може представити као он сам на који делује јединични оператор

$$\left\langle v_1 \middle| \hat{0}^\dagger v_2 \right\rangle = \left\langle v_1 \middle| \hat{0} v_2 \right\rangle \quad \text{и} \quad \left\langle v_1 \middle| \hat{I}^\dagger v_2 \right\rangle = \left\langle v_1 \middle| \hat{I} v_2 \right\rangle .$$

Како су први фактори оба скалара производа слева и здесна једнаки, биће одбачени, па је

$$\hat{0}^\dagger \left| v_2 \right\rangle = \hat{0} \left| v_2 \right\rangle \quad \text{и} \quad \hat{I}^\dagger \left| v_2 \right\rangle = \hat{I} \left| v_2 \right\rangle .$$

Након одбацивања вектора $\left| v_2 \right\rangle$ слева и здесна остају тражене операторске једнакости

$$\hat{0}^\dagger = \hat{0} \quad \text{и} \quad \hat{I}^\dagger = \hat{I}, \quad \text{обе важе } \forall \left| v_1 \right\rangle, \left| v_2 \right\rangle .$$

(г) Овде се показује да је адјунговани производ скалара и оператора једнак производу комплексно коњугованог скалара и адјунгованог оператора. Адјунговани производ се смести у други фактор скаларног производа, па се пребаци у први фактор, применом дефиниције адјунгованог оператора

$$\left\langle v_1 \middle| (\alpha \hat{A})^\dagger v_2 \right\rangle = \left\langle (\alpha \hat{A}) v_1 \middle| v_2 \right\rangle .$$

Производ скалара и оператора делује на вектор тако што прво оператор делује на вектор, а скалар потом тако насталом вектору мења само дужину (норму), те је

$$\left\langle v_1 \middle| (\alpha \hat{A})^\dagger v_2 \right\rangle = \left\langle \alpha (\hat{A} v_1) \middle| v_2 \right\rangle .$$

Пошто да је скаларни производ *антихомоген* у односу на множење скаларом по првом фактору, то скалар напушта скаларни производ као комплексно коњугован

$$\left\langle v_1 \middle| (\alpha \hat{A})^\dagger v_2 \right\rangle = \alpha^* \left\langle \hat{A} v_1 \middle| v_2 \right\rangle .$$

Применом дефиниције адјунгованог оператора, оператор се пребаци у други фактор скаларног производа

$$\left\langle v_1 \middle| (\alpha \hat{A})^\dagger v_2 \right\rangle = \alpha^* \left\langle v_1 \middle| \hat{A}^\dagger v_2 \right\rangle .$$

Будући да је скаларни производ *хомоген* у односу на множење скаларом по другом фактору, комплексно коњуговани скалар се враћа неизмењен у други фактор скаларног производа

$$\left\langle v_1 \middle| (\alpha \hat{A})^\dagger v_2 \right\rangle = \left\langle v_1 \middle| \alpha^* \hat{A}^\dagger v_2 \right\rangle .$$

Како су први фактори скаларног производа слева и здесна једнаки, могу да се елиминишу

$$(\alpha \hat{A})^\dagger \left| v_2 \right\rangle = \alpha^* \hat{A}^\dagger \left| v_2 \right\rangle .$$

Након одбацивања истог вектора $\left| v_2 \right\rangle$ на обе стране, остаје тражена операторска једнакост

$$(\alpha \hat{A})^\dagger = \alpha^* \hat{A}^\dagger , \ \forall \left| v_1 \right\rangle, \left| v_2 \right\rangle .$$

(д) Чему је једнак адјунговани производ два оператора? Адјунговани производ оператора убаци се у други фактор скаларног производа, а затим се пребаци у први фактор, применом дефиниције адјунгованог оператора

$$\left\langle v_1 \middle| (\hat{A}\hat{B})^\dagger v_2 \right\rangle = \left\langle (\hat{A}\hat{B}) v_1 \middle| v_2 \right\rangle.$$

Производ два оператора делује на вектор тако што прво ближи оператор делује на вектор, а потом делује други оператор на тако добијени вектор

$$\left\langle v_1 \middle| (\hat{A}\hat{B})^\dagger v_2 \right\rangle = \left\langle \hat{A}(\hat{B} v_1) \middle| v_2 \right\rangle.$$

По дефиницији адјунгованог оператора, први оператор (адјунгован) може се пребацити у други фактор скаларног производа, што даје

$$\left\langle v_1 \middle| (\hat{A}\hat{B})^\dagger v_2 \right\rangle = \left\langle \hat{B} v_1 \middle| \hat{A}^\dagger v_2 \right\rangle.$$

Сада се, опет према дефиницији адјунгованог оператора, и други оператор пребаци у други фактор скаларног производа

$$\left\langle v_1 \middle| (\hat{A}\hat{B})^\dagger v_2 \right\rangle = \left\langle v_1 \middle| \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger v_2 \right\rangle.$$

Први фактори скаларног производа слева и здесна су једнаки, те се могу одбацити

$$(\hat{A}\hat{B})^\dagger \left| v_2 \right\rangle = \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger \left| v_2 \right\rangle.$$

Након одбацивања истог вектора $\left| v_2 \right\rangle$ слева и здесна, преостаје тражена операторска једнакост

$$(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger, \ \forall \left| v_1 \right\rangle, \left| v_2 \right\rangle.$$

(ђ) Ако постоји инверзан оператор $\hat{A}^{-1}$ оператора $\hat{A}$, то се може записати као

$$\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{I}, \ \hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{I}.$$

На основу другог израза је јасно да он мора важити и за адјунговани оператор

$$(\hat{A}^\dagger)^{-1}(\hat{A}^\dagger) = \hat{I}.$$

С друге стране, адјунговањем обеју страна првог израза добија се

$$(\hat{A}\hat{A}^{-1})^\dagger = \hat{I}^\dagger.$$

На основу претходно доказаних операторских једнакости за јединични оператор: $\hat{I}^\dagger = \hat{I}$ и за производ оператора: $(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger$, следи да је

$$(\hat{A}^{-1})^\dagger \hat{A}^\dagger = \hat{I}.$$

Како су десне стране добијених израза једнаке $\hat{I}$, једнаке су и леве, па

$$\underline{\begin{cases} (\hat{A}^{-1})^\dagger \hat{A}^\dagger = \hat{I} \\ (\hat{A}^\dagger)^{-1}(\hat{A}^\dagger) = \hat{I} \end{cases}} \Rightarrow (\hat{A}^{-1})^\dagger \hat{A}^\dagger = (\hat{A}^\dagger)^{-1} \hat{A}^\dagger.$$

Одбацивањем истих оператора с обе стране, добија се тражена операторска једнакост

$$(\hat{A}^{-1})^\dagger = (\hat{A}^\dagger)^{-1}.$$

(е) Како се множење оператора уствари своди на њихово узастопно дејство, то је

$$(\hat{A}^m)^\dagger = (\hat{A}\hat{A}\ldots\hat{A})^\dagger .$$

На основу операторске једнакости за производ оператора: $(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger$, следи

$$(\hat{A}^m)^\dagger = \hat{A}^\dagger\hat{A}^\dagger\ldots\hat{A}^\dagger ,$$

те се добија следећа операторска једнакост

$$(\hat{A}^m)^\dagger = (\hat{A}^\dagger)^m ,\ \forall\hat{A} .$$

У случају када постоји инверзан оператор $\hat{A}^{-1}$ оператора $\hat{A}$, може се писати

$$(\hat{A}^{-m})^\dagger = \left((\hat{A}^m)^{-1}\right)^\dagger .$$

На основу доказане операторске једнакости: $(\hat{A}^{-1})^\dagger = (\hat{A}^\dagger)^{-1}$, математичке операције степеновања и адјунговања могу да замене места

$$(\hat{A}^{-m})^\dagger = \left((\hat{A}^m)^\dagger\right)^{-1} .$$

Као и малопре, степеновање оператора своди се на узастопно дејство истих

$$(\hat{A}^{-m})^\dagger = \left(\underbrace{(\hat{A}\hat{A}\ldots\hat{A})^\dagger}_{m}\right)^{-1} = \left(\underbrace{(\hat{A}^\dagger\,\hat{A}^\dagger\ldots\hat{A}^\dagger)}_{m}\right)^{-1} = \left((\hat{A}^\dagger)^m\right)^{-1} = (\hat{A}^\dagger)^{-m} ,$$

чиме је добијена последња тражена операторска једнакост

$$(\hat{A}^{-m})^\dagger = (\hat{A}^\dagger)^{-m} .$$

(6.2) Доказати да је потпростор ликова оператора $\hat{A}^\dagger$ истоветан са ортокомплементарним нул-потпростором оператора $\hat{A}$

$$\mathbb{R}(\hat{A}^\dagger) = \mathbb{N}^\perp(\hat{A}),$$

као и да је

$$\dim \mathbb{R}(\hat{A}) = \dim \mathbb{R}(\hat{A}^\dagger).$$

Случај када вектор $|v\rangle$ припада потпростору ликова $\mathbb{R}(\hat{A}^\dagger)$

$$|v\rangle \in \mathbb{R}(\hat{A}^\dagger)$$

еквивалентан је оном када $\exists|\tilde{v}\rangle$ такав да је

$$|v\rangle = \hat{A}^\dagger |\tilde{v}\rangle .$$

Сад, $\forall|v\rangle \in \mathbb{R}(\hat{A}^\dagger)$ и $\forall|n\rangle \in \mathbb{N}(\hat{A})$ може се написати скаларни производ

$$\langle v|n\rangle = \left\langle \hat{A}^\dagger \tilde{v} \middle| n \right\rangle .$$

Према дефиницији адјунгованог оператора може да се обави следећа измена горњег израза

$$\langle v|n\rangle = \left\langle \tilde{v} \middle| \hat{A} n \right\rangle .$$

Како вектор $|n\rangle$ припада нул-потпростору $\mathbb{N}(\hat{A})$ оператора $\hat{A}$, мора да

$$\exists|n\rangle : \hat{A}|n\rangle = |0\rangle ,$$

те је

$$\langle v|n\rangle = \langle \tilde{v}|0\rangle ,$$

односно

$$\langle v|n\rangle = 0 .$$

Ово значи да

$$|v\rangle \in \mathbb{N}^\perp(\hat{A})$$

или, еквивалентно

$$\mathbb{R}(\hat{A}^\dagger) \subset \mathbb{N}^\perp(\hat{A}).$$

С друге стране, $\forall|v\rangle \in \mathbb{R}^\perp(\hat{A}^\dagger)$ и $\forall|\underline{v}\rangle \in \mathbb{U}$, на основу дефиниције адјунгованог оператора, може се писати

$$\left\langle \hat{A}^\dagger \underline{v} \middle| v \right\rangle = \left\langle \underline{v} \middle| \hat{A} v \right\rangle = 0 ,$$

одакле следи да је

$$\hat{A}|v\rangle = |0\rangle ,$$

што уствари значи да је

$$\left|v\right\rangle \in \mathbb{N}(\hat{A}),$$

односно да је

$$\mathbb{R}^{\perp}(\hat{A}^{\dagger}) \subset \mathbb{N}(\hat{A}),$$

одакле је онда

$$\mathbb{R}(\hat{A}^{\dagger}) \supset \mathbb{N}^{\perp}(\hat{A}).$$

Упоређивањем добијена два израза се види да је

$$\underline{\begin{cases} \mathbb{R}(\hat{A}^{\dagger}) \subset \mathbb{N}^{\perp}(\hat{A}) \\ \mathbb{R}(\hat{A}^{\dagger}) \supset \mathbb{N}^{\perp}(\hat{A}) \end{cases}} \Rightarrow \mathbb{R}(\hat{A}^{\dagger}) = \mathbb{N}^{\perp}(\hat{A}).$$

Што се тиче димензија, биће

$$\underline{\begin{cases} \dim \mathbb{N}(\hat{A}) + \dim \mathbb{R}(\hat{A}^{\dagger}) = n \\ \dim \mathbb{N}(\hat{A}) + \dim \mathbb{R}(\hat{A}) = n \end{cases}} \Rightarrow \dim \mathbb{R}(\hat{A}^{\dagger}) = \dim \mathbb{R}(\hat{A}).$$

(6.3) Показати да из израза за комутатор $[\hat{A},\hat{B}]=\hat{0}$ следи израз

$$[\hat{A}^{\dagger},\hat{B}^{\dagger}]=\hat{0}.$$

Према дефиницији комутатора, жељени израз за комутатор адјунгованих оператора може да се напише као

$$[\hat{A}^{\dagger},\hat{B}^{\dagger}]=\hat{A}^{\dagger}\hat{B}^{\dagger}-\hat{B}^{\dagger}\hat{A}^{\dagger}.$$

Како је адјунговани производ оператора једнак производу адјунгованих оператора али са измењеним редоследом истих, биће

$$[\hat{A}^{\dagger},\hat{B}^{\dagger}]=(\hat{B}\hat{A})^{\dagger}-(\hat{A}\hat{B})^{\dagger}.$$

Познато је да је збир/разлика два адјунгована оператора једнак адјунгованом збиру/разлици оператора, те је

$$[\hat{A}^{\dagger},\hat{B}^{\dagger}]=(\hat{B}\hat{A}-\hat{A}\hat{B})^{\dagger},$$

Узимањем у обзир датог израза за комутатор

$$[\hat{A},\hat{B}]=\hat{0}\ \Leftrightarrow\ \hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}=\hat{0}\ \Leftrightarrow\ \hat{A}\hat{B}=\hat{B}\hat{A},$$

добија се да је комутатор адјунгованих оператора једнак

$$[\hat{A}^{\dagger},\hat{B}^{\dagger}]=\hat{0}^{\dagger}.$$

Како је адјунговани нулти оператор једнак нултом оператору, следи

$$[\hat{A}^{\dagger},\hat{B}^{\dagger}]=\hat{0}.$$

(6.4) Нека је $\mathscr{A}$ матрица којом је представљен оператор $\hat{A}$ у не нужно ортонормираном базису $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \ldots, |v_n\rangle\}$. Одредити матрицу $\hat{A}^\dagger$ којом се представља оператор $\mathscr{A}^\dagger$ у реципрочном базису $\{|V_1\rangle, |V_2\rangle, \ldots, |V_n\rangle\}$. Шта се добија у специјалним случајевима ортогоналног и ортонормираног базиса? Шта се може рећи за еуклидски простор?

Оператор $\hat{A}$ је потпуно знан ако се знају ликови $\{\hat{A}|v_1\rangle, \hat{A}|v_2\rangle, \ldots, \hat{A}|v_n\rangle\}$ одређеног базиса $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \ldots, |v_n\rangle\}$. Према основној формули репрезентовања, поменути ликови се развијају по том базису

$$\hat{A}|v_i\rangle = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} |v_j\rangle,$$

а потом се коефицијенти развоја a_{ij} уписују у матрицу (као њени матрични елементи) којом се представља оператор у том базису

$$\mathscr{A} = [a_{ij}].$$

Формула за матричне елементе a_{ij} матрице $\mathscr{A}$, на основу задатка (3.30), добија се на следећи начин

$$\left\langle V_i \middle| \hat{A} v_j \right\rangle = \left\langle V_i \middle| \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \,|\, v_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \langle V_i | v_k \rangle.$$

На основу услова између датог и реципрочног базиса: $\langle V_i | v_k \rangle = \delta_{ik}$, биће

$$\left\langle V_i \middle| \hat{A} v_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \langle V_i | v_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \delta_{ik} = a_{ij},$$

те се матрица оператора $\hat{A}$ у базису $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \ldots, |v_n\rangle\}$ може записати и као

$$\mathscr{A} = \left[\left\langle V_i \middle| \hat{A} v_j \right\rangle \right] \equiv \left[\langle V_i | \, \hat{A} \, | v_j \rangle \right].$$

Матрични елементи оператора $\hat{A}^\dagger$ добијају се на сличан начин; формира се скаларни производ између произвољног вектора датог базиса и лика вектора из реципрочног базиса добијеног деловањем адјунгованог оператора

$$\left\langle v_i \middle| \hat{A}^\dagger V_j \right\rangle \stackrel{\mathrm{d}}{=} \left\langle \hat{A} v_i \middle| V_j \right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \langle v_k \middle| V_j \right\rangle.$$

Скаларни производ је антихомоген по првом фактору у односу на множење скаларом, па је

$$\left\langle v_i \middle| \hat{A}^\dagger V_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^* \langle v_k | V_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^* \delta_{kj} = a_{ji}^*,$$

те ће матрица оператора $\hat{A}^\dagger$ у базису $\{|V_1\rangle, |V_2\rangle, \ldots, |V_n\rangle\}$ бити дата као

$$\mathscr{A}^\dagger = \left[a_{ij}^* \right] = \left[\left\langle v_i \middle| \hat{A}^\dagger v_j \right\rangle^* \right] \equiv \left[\left\langle v_i \middle| \; \hat{A}^\dagger \; \middle| v_j \right\rangle^* \right].$$

У еуклидском простору адјунгована матрица своди се на *транспоновану*, будући да нема комплексног коњуговања матричних елемената.

(6.5) Оператор $\hat{A}$ из простора $\mathbb{R}^4$ пресликава векторе (објекте пресликавања)

$$(0,1,1,1),(-1,0,1,1),(-1,-1,0,1),(-1,-1,-1,0)$$

редом у векторе (ликове пресликавања)

$$(3,-1,-1,-1),(1,-3,-1,-1),(-1,-3,-1,1),(-3,-1,-1,1).$$

Да ли је оператор $\hat{A}$ ермитски? У које ће векторе оператор $\hat{A}^\dagger$ пресликати почетне векторе?

Оператор $\hat{A}$ прво пресликава први објекат у први лик: $|l_1\rangle = \hat{A}|o_1\rangle$, што се, на основу изоморфности простора уређених четворки и простора матрица, матрично може записати као

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12}+a_{13}+a_{14} \\ a_{22}+a_{23}+a_{24} \\ a_{32}+a_{33}+a_{34} \\ a_{42}+a_{43}+a_{44} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{12}+a_{13}+a_{14}=3 \\ a_{22}+a_{23}+a_{24}=-1 \\ a_{32}+a_{33}+a_{34}=-1 \\ a_{42}+a_{43}+a_{44}=-1 \end{cases}$$

потом пресликава други објекат у други лик: $|l_2\rangle = \hat{A}|o_2\rangle$, матрично

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{11}+a_{13}+a_{14} \\ -a_{21}+a_{23}+a_{24} \\ -a_{31}+a_{33}+a_{34} \\ -a_{41}+a_{43}+a_{44} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -a_{11}+a_{13}+a_{14}=1 \\ -a_{21}+a_{23}+a_{24}=-3 \\ -a_{31}+a_{33}+a_{34}=-1 \\ -a_{41}+a_{43}+a_{44}=-1 \end{cases}$$

а онда пресликава трећи објекат у трећи лик: $|l_3\rangle = \hat{A}|o_3\rangle$, илити, у облику матрица

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{11}-a_{12}+a_{14} \\ -a_{21}-a_{22}+a_{24} \\ -a_{31}-a_{32}+a_{34} \\ -a_{41}-a_{42}+a_{44} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -a_{11}-a_{12}+a_{14}=-1 \\ -a_{21}-a_{22}+a_{24}=-3 \\ -a_{31}-a_{32}+a_{34}=-1 \\ -a_{41}-a_{42}+a_{44}=1 \end{cases}$$

и на крају четврти објекат у четврти лик: $|l_4\rangle = \hat{A}|o_4\rangle$, у матричној форми записано као

$$\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{11}-a_{12}-a_{14} \\ -a_{21}-a_{22}-a_{24} \\ -a_{31}-a_{32}-a_{34} \\ -a_{41}-a_{42}-a_{44} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -a_{11}-a_{12}-a_{13}=-3 \\ -a_{21}-a_{22}-a_{23}=-1 \\ -a_{31}-a_{32}-a_{33}=-1 \\ -a_{41}-a_{42}-a_{43}=1 \end{cases}$$

Прва врста жељене матрице добија се из првих једначина горња четири система једначина

$$\begin{cases} a_{12}+a_{13}+a_{14}=3/\cdot(-1) \\ -a_{11}+a_{13}+a_{14}=1 \\ -a_{11}-a_{12}+a_{14}=-1 \\ -a_{11}-a_{12}-a_{13}=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a_{12}-a_{13}-a_{14}=-3 \\ -a_{11}+a_{13}+a_{14}=1 \\ -a_{11}-a_{12}+a_{14}=-1 \\ -a_{11}-a_{12}-a_{13}=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a_{11}-a_{12}=-2 \\ -a_{11}+a_{13}+a_{14}=1/\cdot(-1) \\ -a_{11}-a_{12}+a_{14}=-1 \\ -a_{11}-a_{12}-a_{13}=-3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a_{11}-a_{12}=2 \\ a_{11}-a_{13}-a_{14}=-1 \\ -2+a_{14}=-1 \\ -2-a_{13}=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{12}=2-a_{11} \\ a_{11}-a_{13}-a_{14}=-1 \\ a_{14}=1 \\ a_{13}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{12}=2-a_{11} \\ a_{11}-2=-1 \\ a_{14}=1 \\ a_{13}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{12}=2-a_{11} \\ a_{11}=1 \\ a_{14}=1 \\ a_{13}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}=1 \\ a_{12}=1 \\ a_{13}=1 \\ a_{14}=1 \end{cases}$$

друга врста жељене матрице добија се из других једначина горња четири система једначина

$$\begin{cases} a_{22}+a_{23}+a_{24}=-1/\cdot(-1) \\ -a_{21}+a_{23}+a_{24}=-3 \\ -a_{21}-a_{22}+a_{24}=-3 \\ -a_{21}-a_{22}-a_{23}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a_{22}-a_{23}-a_{24}=1 \\ -a_{21}+a_{23}+a_{24}=-3 \\ -a_{21}-a_{22}+a_{24}=-3 \\ -a_{21}-a_{22}-a_{23}=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a_{21}-a_{22}=-2 \\ -a_{21}+a_{23}+a_{24}=-3 \\ -a_{21}-a_{22}+a_{24}=-3 \\ -a_{21}-a_{22}-a_{23}=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a_{21}-a_{22}=-2 \\ -a_{21}+a_{23}+a_{24}=-3 \\ -2+a_{24}=-3 \\ -2-a_{23}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{22}=2-a_{21} \\ -a_{21}+a_{23}+a_{24}=-3 \\ a_{24}=-1 \\ a_{23}=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{22}=2-a_{21} \\ a_{21}-2=3 \\ a_{24}=-1 \\ a_{23}=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{21}=1 \\ a_{22}=1 \\ a_{23}=-1 \\ a_{24}=-1 \end{cases}$$

трећа врста жељене матрице добија се из трећих једначина горња четири система једначина

$$\begin{cases} a_{32}+a_{33}+a_{34}=-1/\cdot(-1) \\ -a_{31}+a_{33}+a_{34}=-1 \\ -a_{31}-a_{32}+a_{34}=-1 \\ -a_{31}-a_{32}-a_{33}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a_{32}-a_{33}-a_{34}=1 \\ -a_{31}+a_{33}+a_{34}=-1 \\ -a_{31}-a_{32}+a_{34}=-1 \\ -a_{31}-a_{32}-a_{33}=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a_{31}-a_{32}=0 \\ -a_{31}+a_{33}+a_{34}=-1 \\ -a_{31}-a_{32}+a_{34}=-1 \\ -a_{31}-a_{32}-a_{33}=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{32}=-a_{31} \\ -a_{31}+a_{33}+a_{34}=-1 \\ a_{34}=-1 \\ a_{33}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{32}=-a_{31} \\ -a_{31}+1-1=-1 \\ a_{34}=-1 \\ a_{33}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{32}=-a_{31} \\ a_{31}=1 \\ a_{34}=-1 \\ a_{33}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{31}=1 \\ a_{32}=-1 \\ a_{33}=1 \\ a_{34}=-1 \end{cases}$$

а четврта врста матрице добија се из четвртих једначина горња четири система једначина

$$\begin{cases} a_{42}+a_{43}+a_{44}=-1/\cdot(-1) \\ -a_{41}+a_{43}+a_{44}=-1 \\ -a_{41}-a_{42}+a_{44}=1 \\ -a_{41}-a_{42}-a_{43}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a_{42}-a_{43}-a_{44}=1 \\ -a_{41}+a_{43}+a_{44}=-1 \\ -a_{41}-a_{42}+a_{44}=1 \\ -a_{41}-a_{42}-a_{43}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a_{41}-a_{42}=0 \\ -a_{41}+a_{43}+a_{44}=-1 \\ -a_{41}-a_{42}+a_{44}=1 \\ -a_{41}-a_{42}-a_{43}=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{42}=-a_{41} \\ -a_{41}+a_{43}+a_{44}=-1 \\ a_{44}=1 \\ a_{43}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{42}=-a_{41} \\ -a_{41}-1+1=-1 \\ a_{44}=1 \\ a_{43}=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{42}=-a_{41} \\ a_{41}=1 \\ a_{44}=1 \\ a_{43}=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{41}=1 \\ a_{42}=-1 \\ a_{43}=-1 \\ a_{44}=1 \end{cases}$$

Даклем, матрица којом се представља оператор $\hat{A}$ у апсолутном базису гласи

$$\mathscr{A}=\left[\hat{A}\right]_{\{|e_i\rangle\}}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

а када се она транспонује (комплексним коњуговањем реалних матричних елемената они се не мењају), добија се матрица адјунгованог оператора (врсте се замене колонама) у апсолутном базису

$$\mathscr{A}^{\dagger}=\left[\hat{A}^{\dagger}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

Оператор $\hat{A}$ јесте *ермитски* оператор: $\hat{A}^{\dagger}=\hat{A}$, пошто се јасно види да је $\mathscr{A}^{\dagger}=\mathscr{A}$. Ово уствари значи да ће оператор $\hat{A}^{\dagger}$ делујући на почетне векторе дати исте ликове као и оператор $\hat{A}$.

(6.6) Оператор $\hat{A}$ представљен је матрицом $\mathscr{A}$ у базису $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle\}$. Одредити матрицу којом се представља оператор $\hat{A}^\dagger$ у истом базису. Дата су два базиса

(а) $\begin{cases} |v_1\rangle = (1,2,1) \\ |v_2\rangle = (1,1,2), \\ |v_3\rangle = (1,1,0) \end{cases}$ $\left[\hat{A}\right]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{bmatrix}$;

(б) $\begin{cases} |v_1\rangle = (1,1,1) \\ |v_2\rangle = (0,1,1), \\ |v_3\rangle = (0,0,1) \end{cases}$ $\left[\hat{A}\right]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

(а) Матрица којом је представљен оператор $\hat{A}$ у задатом базису $\{|v_1\rangle = (1,2,1), |v_2\rangle = (1,1,2), |v_3\rangle = (1,1,0)\}$ дата је изразом

$$\left[\hat{A}\right]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{bmatrix}.$$

Треба одредити матрицу којом се исти оператор представља у апсолутном базису

$$\left[\hat{A}\right]_{\{|e_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

тако што се прво делује познатом матрицом на дате векторе

$$\left[\hat{A}\right]_{\{|v_i\rangle\}} |v_1\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 3\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 5\cdot 2 + (-1)\cdot 1 \\ 2\cdot 1 + 7\cdot 2 + (-3)\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 13 \end{bmatrix}_{\{|v_i\rangle\}}$$

$$= 6|v_1\rangle + 9|v_2\rangle + 13|v_3\rangle = 6\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 9\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 13\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 34 \\ 24 \end{bmatrix}_{\{|e_i\rangle\}}$$

$$\left[\hat{A}\right]_{\{|v_i\rangle\}} |v_2\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 3\cdot 2 \\ 0\cdot 1 + 5\cdot 1 + (-1)\cdot 2 \\ 2\cdot 1 + 7\cdot 1 + (-3)\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}_{\{|v_i\rangle\}}$$

$$= 8|v_1\rangle + 3|v_2\rangle + 3|v_3\rangle = 8\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 22 \\ 14 \end{bmatrix}_{\{|e_i\rangle\}}$$

$$\left[\hat{A}\right]_{\{|v_i\rangle\}}|v_3\rangle=\begin{bmatrix}1&1&3\\0&5&-1\\2&7&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot1+1\cdot1+3\cdot0\\0\cdot1+5\cdot1+(-1)\cdot0\\2\cdot1+7\cdot1+(-3)\cdot0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\5\\9\end{bmatrix}_{\{|v_i\rangle\}}$$

$$=2|v_1\rangle+5|v_2\rangle+9|v_3\rangle=2\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}+9\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16\\18\\12\end{bmatrix}_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}$$

а потом непознатом матрицом на исте векторе

$$\left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}|v_1\rangle=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}+2a_{12}+a_{13}\\a_{21}+2a_{22}+a_{23}\\a_{31}+2a_{32}+a_{33}\end{bmatrix}_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}$$

$$\left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}|v_2\rangle=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}+a_{12}+2a_{13}\\a_{21}+a_{22}+2a_{23}\\a_{31}+a_{32}+2a_{33}\end{bmatrix}_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}$$

$$\left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}|v_3\rangle=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}+a_{12}\\a_{21}+a_{22}\\a_{31}+a_{32}\end{bmatrix}_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}$$

Ликови који се добијају деловањем матрица истог оператора у различитим базисима на исте објекте морају бити једнаки, те се добијају три система једначина

$$\left[\hat{A}\right]_{\{|v_i\rangle\}}|v_1\rangle=\left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}|v_1\rangle\ \Leftrightarrow\ \begin{bmatrix}28\\34\\24\end{bmatrix}_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}a_{11}+2a_{12}+a_{13}\\a_{21}+2a_{22}+a_{23}\\a_{31}+2a_{32}+a_{33}\end{bmatrix}_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\ \Rightarrow\ \underline{\begin{cases}28=a_{11}+2a_{12}+a_{13}\\34=a_{21}+2a_{22}+a_{23}\\24=a_{31}+2a_{32}+a_{33}\end{cases}}$$

$$\left[\hat{A}\right]_{\{|v_i\rangle\}}|v_2\rangle=\left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}|v_2\rangle\ \Leftrightarrow\ \begin{bmatrix}14\\22\\14\end{bmatrix}_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}a_{11}+a_{12}+2a_{13}\\a_{21}+a_{22}+2a_{23}\\a_{31}+a_{32}+2a_{33}\end{bmatrix}_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\ \Rightarrow\ \underline{\begin{cases}14=a_{11}+a_{12}+2a_{13}\\22=a_{21}+a_{22}+2a_{23}\\14=a_{31}+a_{32}+2a_{33}\end{cases}}$$

$$\left[\hat{A}\right]_{\{|v_i\rangle\}}|v_3\rangle=\left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}|v_3\rangle\ \Leftrightarrow\ \begin{bmatrix}16\\18\\12\end{bmatrix}_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}a_{11}+a_{12}\\a_{21}+a_{22}\\a_{31}+a_{32}\end{bmatrix}_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\ \Rightarrow\ \underline{\begin{cases}16=a_{11}+a_{12}\\18=a_{21}+a_{22}\\12=a_{31}+a_{32}\end{cases}}$$

Матрични елементи прве врсте тражене матрице добијају се из првих једначина горња три система

$$\underline{\begin{cases}28=a_{11}+2a_{12}+a_{13}\\14=a_{11}+a_{12}+2a_{13}\\16=a_{11}+a_{12}\end{cases}}\ \Leftrightarrow\ \underline{\begin{cases}28=a_{11}+2a_{12}+a_{13}\\14=a_{11}+a_{12}+2a_{13}\\a_{11}=16-a_{12}\end{cases}}\ \Rightarrow\ \underline{\begin{cases}28=16-a_{12}+2a_{12}+a_{13}\\14=16-a_{12}+a_{12}+2a_{13}\\a_{11}=16-a_{12}\end{cases}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 28 = 16 + a_{12} + a_{13} \\ 14 = 16 + 2a_{13} \\ a_{11} = 16 - a_{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 28 = 16 + a_{12} + a_{13} \\ a_{13} = -1 \\ a_{11} = 16 - a_{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{12} = 13 \\ a_{13} = -1 \\ a_{11} = 16 - a_{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} = 3 \\ a_{12} = 13 \\ a_{13} = -1 \end{cases}$$

матрични елементи друге врсте тражене матрице добијају се из других једначина горња три система

$$\begin{cases} 34 = a_{21} + 2a_{22} + a_{23} \\ 22 = a_{21} + a_{22} + 2a_{23} \\ 18 = a_{21} + a_{22} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 34 = a_{21} + 2a_{22} + a_{23} \\ 22 = a_{21} + a_{22} + 2a_{23} \\ a_{21} = 18 - a_{22} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 34 = 18 - a_{22} + 2a_{22} + a_{23} \\ 22 = 18 - a_{22} + a_{22} + 2a_{23} \\ a_{21} = 18 - a_{22} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 34 = 18 + a_{22} + a_{23} \\ 22 = 18 + 2a_{23} \\ a_{21} = 18 - a_{22} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 34 = 18 + a_{22} + a_{23} \\ a_{23} = 2 \\ a_{21} = 18 - a_{22} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{22} = 14 \\ a_{23} = 2 \\ a_{21} = 18 - a_{22} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{21} = 4 \\ a_{22} = 14 \\ a_{23} = 2 \end{cases}$$

и на крају, матрични елементи треће врсте тражене матрице добијају се из трећих једначина горња три система

$$\begin{cases} 24 = a_{31} + 2a_{32} + a_{33} \\ 14 = a_{31} + a_{32} + 2a_{33} \\ 12 = a_{31} + a_{32} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24 = a_{31} + 2a_{32} + a_{33} \\ 14 = a_{31} + a_{32} + 2a_{33} \\ a_{31} = 12 - a_{32} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 24 = 12 - a_{32} + 2a_{32} + a_{33} \\ 14 = 12 - a_{32} + a_{32} + 2a_{33} \\ a_{31} = 12 - a_{32} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 24 = 12 + a_{32} + a_{33} \\ a_{33} = 1 \\ a_{31} = 12 - a_{32} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12 = a_{32} + a_{33} \\ a_{33} = 1 \\ a_{31} = 12 - a_{32} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{32} = 11 \\ a_{33} = 1 \\ a_{31} = 12 - a_{32} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{31} = 1 \\ a_{32} = 11 \\ a_{33} = 1 \end{cases}$$

Горе наведеним поступком добијена је матрица $\mathscr{A}$ којом се представља оператор $\hat{A}$ у апсолутном базису

$$\mathscr{A} = \left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 3 & 13 & -1 \\ 4 & 14 & 2 \\ 1 & 11 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица $\mathscr{A}^\dagger$ којом се представља оператор $\hat{A}^\dagger$ у апсолутном базису добија се транспоновањем (изменом места врста и колона) матрице $\mathscr{A}$, док комплексно коњуговање матричних елемената у овом случају не мења матричне елементе, те је

$$\mathscr{A}^\dagger = \left[\hat{A}^\dagger\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 13 & 14 & 11 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Сада се овом матрицом делује на векторе задатог базиса

$$\left[\hat{A}^\dagger\right]_{\{|e_i\rangle\}}|v_1\rangle=\begin{bmatrix}3&4&1\\13&14&11\\-1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\cdot1+4\cdot2+1\cdot1\\13\cdot1+14\cdot2+11\cdot1\\(-1)\cdot1+2\cdot2+1\cdot1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\\52\\4\end{bmatrix}=12|e_1\rangle+52|e_2\rangle+4|e_3\rangle$$

$$=\alpha|v_1\rangle+\beta|v_2\rangle+\gamma|v_3\rangle=\alpha\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha+\beta+\gamma\\2\alpha+\beta+\gamma\\\alpha+2\beta\end{bmatrix}$$

$$\left[\hat{A}^\dagger\right]_{\{|e_i\rangle\}}|v_2\rangle=\begin{bmatrix}3&4&1\\13&14&11\\-1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\cdot1+4\cdot1+1\cdot2\\13\cdot1+14\cdot1+11\cdot2\\(-1)\cdot1+2\cdot1+1\cdot2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\49\\3\end{bmatrix}=9|e_1\rangle+49|e_2\rangle+3|e_3\rangle$$

$$=\mu|v_1\rangle+\eta|v_2\rangle+\varpi|v_3\rangle=\mu\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}+\eta\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}+\varpi\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mu+\eta+\varpi\\2\mu+\eta+\varpi\\\mu+2\eta\end{bmatrix}$$

$$\left[\hat{A}^\dagger\right]_{\{|e_i\rangle\}}|v_3\rangle=\begin{bmatrix}3&4&1\\13&14&11\\-1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\cdot1+4\cdot1+1\cdot0\\13\cdot1+14\cdot1+11\cdot0\\(-1)\cdot1+2\cdot1+1\cdot0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\27\\1\end{bmatrix}=7|e_1\rangle+27|e_2\rangle+1|e_3\rangle$$

$$=\rho|v_1\rangle+\sigma|v_2\rangle+\tau|v_3\rangle=\rho\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}+\sigma\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\rho+\sigma+\tau\\2\rho+\sigma+\tau\\\rho+2\sigma\end{bmatrix}$$

Упоређивањем црвених матрица-колона добија се први систем једначина

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=12\\2\alpha+\beta+\gamma=52\\\alpha+2\beta=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=12\\2\alpha+\beta+\gamma=52\\\alpha=4-2\beta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4-2\beta+\beta+\gamma=12\\8-4\beta+\beta+\gamma=52\\\alpha=4-2\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4-\beta+\gamma=12\\8-3\beta+\gamma=52\\\alpha=4-2\beta\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\gamma=8+\beta\\8-3\beta+\gamma=52\\\alpha=4-2\beta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\gamma=8+\beta\\8-3\beta+8+\beta=52\\\alpha=4-2\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\gamma=8+\beta\\16-2\beta=52\\\alpha=4-2\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\gamma=8+\beta\\\beta=-18\\\alpha=4-2\beta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=40\\\beta=-18\\\gamma=-10\end{cases}$$

Упоређивањем плавих матрица-колона добија се други систем једначина

$$\begin{cases}9=\mu+\eta+\varpi\\49=2\mu+\eta+\varpi\\3=\mu+2\eta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9=\mu+\eta+\varpi\\49=2\mu+\eta+\varpi\\\mu=3-2\eta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}9=3-2\eta+\eta+\varpi\\49=6-4\eta+\eta+\varpi\\\mu=3-2\eta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6=-\eta+\varpi\\43=\varpi-3\eta\\\mu=3-2\eta\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\eta=\varpi-6\\43=\varpi-3\eta\\\mu=3-2\eta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\eta=\varpi-6\\43=\varpi-3\varpi+18\\\mu=3-2\varpi+12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\eta=\varpi-6\\25=-2\varpi\\\mu=15-2\varpi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\eta=\varpi-6\\\varpi=-25/2\\\mu=15-2\varpi\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\eta=-25/2-6\\\varpi=-25/2\\\mu=15+25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mu=40\\\eta=-37/2\\\varpi=-25/2\end{cases}$$

Упоређивањем љубичастих матрица-колона добија се трећи систем једначина

$$\begin{cases} 7=\rho+\sigma+\tau \,/\cdot(-1) \\ 27=2\rho+\sigma+\tau \\ 1=\rho+2\sigma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7=-\rho-\sigma-\tau \\ 27=2\rho+\sigma+\tau \\ 2\sigma=1-\rho \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7=\rho+\sigma+\tau \\ \rho=20 \\ 2\sigma=1-\rho \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7=20+\sigma+\tau \\ \rho=20 \\ 2\sigma=1-20 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -13=\sigma+\tau \\ \rho=20 \\ \sigma=-19/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -13=-19/2+\tau \\ \rho=20 \\ \sigma=-19/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tau=-13+19/2 \\ \rho=20 \\ \sigma=-19/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho=20 \\ \sigma=-19/2 \\ \tau=-7/2 \end{cases}$$

Пошто су добијени сви коефицијенти, три формуле репрезентовања ликова базиса гласе

$$\left[\hat{A}^\dagger\right]_{\{|e_i\rangle\}}|v_1\rangle=40|v_1\rangle+(-18)|v_2\rangle+(-10)|v_3\rangle$$

$$\left[\hat{A}^\dagger\right]_{\{|e_i\rangle\}}|v_2\rangle=40|v_1\rangle+(-37/2)|v_2\rangle+(-25/2)|v_3\rangle$$

$$\left[\hat{A}^\dagger\right]_{\{|e_i\rangle\}}|v_3\rangle=20|v_1\rangle+(-19/2)|v_2\rangle+(-7/2)|v_3\rangle$$

те се из њих може написати матрица којом се представља оператор $\hat{A}^\dagger$ у задатом базису

$$\left[\hat{A}^\dagger\right]_{\{|v_i\rangle\}}=\begin{bmatrix} 40 & 40 & 20 \\ -18 & -37/2 & -19/2 \\ -10 & -25/2 & -7/2 \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 80 & 80 & 40 \\ -36 & -37 & -19 \\ -20 & -25 & -7 \end{bmatrix}.$$

(б) Матрица којом је представљен оператор $\hat{A}$ у задатом базису $\{|v_1\rangle=(1,1,1),|v_2\rangle=(0,1,1),$ $|v_3\rangle=(0,0,1)\}$ дата је изразом

$$\left[\hat{A}\right]_{\{|v_i\rangle\}}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Треба одредити матрицу којом се исти оператор представља у апсолутном базису

$$\left[\hat{A}\right]_{\{|e_i\rangle\}}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

тако што се прво делује познатом матрицом на дате векторе

$$\left[\hat{A}\right]_{\{|v_i\rangle\}}|v_1\rangle=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1\cdot1+0\cdot1+1\cdot1 \\ 1\cdot1+0\cdot1+2\cdot1 \\ 0\cdot1+1\cdot1+3\cdot1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_{\{|v_i\rangle\}}$$

$$=2|v_1\rangle+3|v_2\rangle+4|v_3\rangle=2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}+3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}+4\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}_{\{|e_i\rangle\}}$$

$$\left[\hat{A}\right]_{\{|v_i\rangle\}}|v_2\rangle = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\cdot 0+0\cdot 1+1\cdot 1\\ 1\cdot 0+0\cdot 1+2\cdot 1\\ 0\cdot 0+1\cdot 1+3\cdot 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}_{\{|v_i\rangle\}}$$

$$=1|v_1\rangle+2|v_2\rangle+4|v_3\rangle = 1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\\7\end{bmatrix}_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}$$

$$\left[\hat{A}\right]_{\{|v_i\rangle\}}|v_3\rangle = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\cdot 0+0\cdot 0+1\cdot 1\\ 1\cdot 0+0\cdot 0+2\cdot 1\\ 0\cdot 0+1\cdot 0+3\cdot 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}_{\{|v_i\rangle\}}$$

$$=1|v_1\rangle+2|v_2\rangle+3|v_3\rangle = 1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\\6\end{bmatrix}_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}$$

а потом непознатом матрицом на исте векторе

$$\left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}|v_1\rangle = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11}+a_{12}+a_{13}\\ a_{21}+a_{22}+a_{23}\\ a_{31}+a_{32}+a_{33}\end{bmatrix}_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}$$

$$\left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}|v_2\rangle = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{12}+a_{13}\\ a_{22}+a_{23}\\ a_{32}+a_{33}\end{bmatrix}_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}$$

$$\left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}|v_3\rangle = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{13}\\ a_{23}\\ a_{33}\end{bmatrix}_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}$$

Ликови који се добијају деловањем матрица истог оператора у различитим базисима на исте објекте морају бити једнаки, те се добијају три система једначина

$$\left[\hat{A}\right]_{\{|v_i\rangle\}}|v_1\rangle = \left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}|v_1\rangle \Leftrightarrow \begin{bmatrix}2\\5\\9\end{bmatrix}_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix}a_{11}+a_{12}+a_{13}\\ a_{21}+a_{22}+a_{23}\\ a_{31}+a_{32}+a_{33}\end{bmatrix}_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} \Rightarrow \underline{\begin{cases}2=a_{11}+a_{12}+a_{13}\\ 5=a_{21}+a_{22}+a_{23}\\ 9=a_{31}+a_{32}+a_{33}\end{cases}}$$

$$\left[\hat{A}\right]_{\{|v_i\rangle\}}|v_2\rangle = \left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}|v_2\rangle \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1\\3\\7\end{bmatrix}_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix}a_{12}+a_{13}\\ a_{22}+a_{23}\\ a_{32}+a_{33}\end{bmatrix}_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} \Rightarrow \underline{\begin{cases}1=a_{12}+a_{13}\\ 3=a_{22}+a_{23}\\ 7=a_{32}+a_{33}\end{cases}}$$

$$\left[\hat{A}\right]_{\{|v_i\rangle\}}|v_3\rangle = \left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}|v_3\rangle \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1\\3\\6\end{bmatrix}_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix}a_{13}\\ a_{23}\\ a_{33}\end{bmatrix}_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} \Rightarrow \underline{\begin{cases}1=a_{13}\\ 3=a_{23}\\ 6=a_{33}\end{cases}}$$

Матрични елементи прве врсте тражене матрице добијају се из првих једначина горња три система

$$\begin{cases} 2 = a_{11} + a_{12} + a_{13} \\ 1 = a_{12} + a_{13} \\ 1 = a_{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = a_{11} + 1 \\ 1 = a_{12} + a_{13} \\ a_{13} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = 1 \\ a_{12} = 0 \\ a_{13} = 1 \end{cases}$$

матрични елементи друге врсте тражене матрице добијају се из других једначина горња три система

$$\begin{cases} 5 = a_{21} + a_{22} + a_{23} \\ 3 = a_{22} + a_{23} \\ 3 = a_{23} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 = a_{21} + 3 \\ 3 = a_{22} + a_{23} \\ a_{23} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{21} = 2 \\ 3 = a_{22} + 3 \\ a_{23} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{21} = 2 \\ a_{22} = 0 \\ a_{23} = 3 \end{cases}$$

и на крају, матрични елементи треће врсте тражене матрице добијају се из трећих једначина горња три система

$$\begin{cases} 9 = a_{31} + a_{32} + a_{33} \\ 7 = a_{32} + a_{33} \\ 6 = a_{33} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9 = a_{31} + 7 \\ 7 = a_{32} + a_{33} \\ a_{33} = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{31} = 2 \\ 7 = a_{32} + 6 \\ a_{33} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{31} = 2 \\ a_{32} = 1 \\ a_{33} = 6 \end{cases}$$

Горе наведеним поступком добијена је матрица $\mathscr{A}$ којом се представља оператор $\hat{A}$ у апсолутном базису

$$\mathscr{A} = \left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Матрица $\mathscr{A}^\dagger$ којом се представља оператор $\hat{A}^\dagger$ у апсолутном базису добија се транспоновањем (изменом места врста и колона) матрице $\mathscr{A}$, док комплексно коњуговање матричних елемената у овом случају не мења матричне елементе, те је

$$\mathscr{A}^\dagger = \left[\hat{A}^\dagger\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Сада се овом матрицом делује на векторе задатог базиса

$$\left[\hat{A}^\dagger\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} |v_1\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot1+2\cdot1+2\cdot1 \\ 0\cdot1+0\cdot1+1\cdot1 \\ 1\cdot1+3\cdot1+6\cdot1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix} = 5|\mathrm{e}_1\rangle + 1|\mathrm{e}_2\rangle + 5|\mathrm{e}_3\rangle$$

$$= \alpha|v_1\rangle + \beta|v_2\rangle + \gamma|v_3\rangle = \alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha+\beta \\ \alpha+\beta+\gamma \end{bmatrix}$$

$$\left[\hat{A}^\dagger\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}|v_2\rangle=\begin{bmatrix}1&2&2\\0&0&1\\1&3&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot0+2\cdot1+2\cdot1\\0\cdot0+0\cdot1+1\cdot1\\1\cdot0+3\cdot1+6\cdot1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\1\\9\end{bmatrix}=4|\mathrm{e}_1\rangle+1|\mathrm{e}_2\rangle+9|\mathrm{e}_3\rangle$$

$$=\mu|v_1\rangle+\eta|v_2\rangle+\varpi|v_3\rangle=\mu\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+\eta\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}+\varpi\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mu\\\mu+\eta\\\mu+\eta+\varpi\end{bmatrix}$$

$$\left[\hat{A}^\dagger\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}|v_3\rangle=\begin{bmatrix}1&2&2\\0&0&1\\1&3&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot0+2\cdot0+2\cdot1\\0\cdot0+0\cdot0+1\cdot1\\1\cdot0+3\cdot0+6\cdot1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\6\end{bmatrix}=2|\mathrm{e}_1\rangle+1|\mathrm{e}_2\rangle+6|\mathrm{e}_3\rangle$$

$$=\rho|v_1\rangle+\sigma|v_2\rangle+\tau|v_3\rangle=\rho\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+\sigma\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\rho\\\rho+\sigma\\\rho+\sigma+\tau\end{bmatrix}$$

Упоређивањем црвених матрица-колона добија се први систем једначина

$$\begin{cases}\alpha=5\\\alpha+\beta=1\\\alpha+\beta+\gamma=10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=5\\\alpha+\beta=1\\1+\gamma=10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=5\\5+\beta=1\\\gamma=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=5\\\beta=-4\\\gamma=9\end{cases}$$

Упоређивањем плавих матрица-колона добија се други систем једначина

$$\begin{cases}4=\mu\\1=\mu+\eta\\9=\mu+\eta+\varpi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mu=4\\1=\mu+\eta\\9=1+\varpi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mu=4\\1=4+\eta\\\varpi=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mu=4\\\eta=-3\\\varpi=8\end{cases}$$

Упоређивањем љубичастих матрица-колона добија се трећи систем једначина

$$\begin{cases}2=\rho\\1=\rho+\sigma\\6=\rho+\sigma+\tau\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\rho=2\\1=\rho+\sigma\\6=1+\tau\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\rho=2\\1=2+\sigma\\\tau=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\rho=2\\\sigma=-1\\\tau=5\end{cases}$$

Пошто су добијени сви коефицијенти, три формуле репрезентовања ликова базиса гласе

$$\left[\hat{A}^\dagger\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}|v_1\rangle=5|v_1\rangle+(-4)|v_2\rangle+9|v_3\rangle$$

$$\left[\hat{A}^\dagger\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}|v_2\rangle=4|v_1\rangle+(-3)|v_2\rangle+8|v_3\rangle$$

$$\left[\hat{A}^\dagger\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}|v_3\rangle=2|v_1\rangle+(-1)|v_2\rangle+5|v_3\rangle$$

те се из њих може написати матрица којом се представља оператор $\hat{A}^\dagger$ у задатом базису

$$\left[\hat{A}^\dagger\right]_{\{|v_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}5&4&2\\-4&-3&-1\\9&8&5\end{bmatrix}.$$

(6.7) Одредити матрице којима се представља адјунговани оператор $\hat{D}^\dagger$ оператора $\hat{D} = \mathrm{d}/\mathrm{d}t$ у базисима $\{|\mathrm{e}_1\rangle = 1, |\mathrm{e}_2\rangle = t, |\mathrm{e}_3\rangle = t^2\}$ и $\{|v_1\rangle = 1, |v_2\rangle = t, |v_3\rangle = (3t^2-1)/2\}$ простора $\mathbb{P}^3$, у коме је скаларни производ задат као

$$\langle v_1 | v_2 \rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^* \eta_i \ .$$

Прво: треба проверити да ли је задати скуп вектора $\{1, t, t^2\}$ стварно базис

$$\alpha \cdot 1 + \beta t + \gamma t^2 = 0 \ \Leftrightarrow \ \alpha \cdot 1 + \beta t + \gamma t^2 = 0 \cdot 1 + 0t + 0t^2 \ \Rightarrow \ \alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$$

што, очигледно, јесте испуњено.

Сада се делује оператором $\hat{D} = \mathrm{d}/\mathrm{d}t$ на векторе задатог базиса

$$\hat{D}(1) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0t + 0t^2$$

$$\hat{D}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = 1 = 1 \cdot 1 + 0t + 0t^2$$

$$\hat{D}(t^2) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^2) = \frac{\mathrm{d}(t^2)}{\mathrm{d}t} = 2t = 0 \cdot 1 + 2t + 0t^2$$

Из горње три формуле репрезентовања следи матрица диференцијалног оператора

$$\mathscr{D} = \left[\hat{D}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

док се матрица њему адјунгованог оператора добија транспоновањем (нема сврхе комплексно коњуговати реалне бројеве)

$$\mathscr{D}^\dagger = \left[\hat{D}^\dagger\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Друго: да ли је задати скуп вектора $\{1, t, (3t^2-1)/2\}$ стварно базис?

$$\alpha \cdot 1 + \beta t + \gamma \frac{1}{2}(3t^2 - 1) = 0 \ \Leftrightarrow \ \left(\alpha - \frac{\gamma}{2}\right) \cdot 1 + \beta t + \frac{3\gamma}{2} t^2 = 0 \cdot 1 + 0t + 0t^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - \dfrac{\gamma}{2} = 0 \\ \beta = 0 \\ \dfrac{3\gamma}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \dfrac{\gamma}{2} = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Задати скуп вектора очигледно јесте базис.

Како задати базис није ортонормиран, матрица адјунгованог оператора у њему се тражи преко већ добијене матрице $\mathscr{D}^\dagger = \left[\hat{D}^\dagger\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}$

$$\mathscr{D}^\dagger|v_1\rangle = \left[\hat{D}^\dagger\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}|v_1\rangle = \begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\cdot1+0\cdot0+0\cdot0\\1\cdot1+0\cdot0+0\cdot0\\0\cdot1+2\cdot0+0\cdot0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = |v_2\rangle = 0|v_1\rangle + 1|v_2\rangle + 0|v_3\rangle$$

$$\mathscr{D}^\dagger|v_2\rangle = \left[\hat{D}^\dagger\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}|v_2\rangle = \begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\cdot0+0\cdot1+0\cdot0\\1\cdot0+0\cdot1+0\cdot0\\0\cdot0+2\cdot1+0\cdot0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = 2|\mathrm{e}_3\rangle = 0|\mathrm{e}_1\rangle + 0|\mathrm{e}_2\rangle + 2|\mathrm{e}_3\rangle$$

$$= \alpha|v_1\rangle + \beta|v_2\rangle + \gamma|v_3\rangle = \alpha\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + \frac{\gamma}{2}\begin{bmatrix}-1\\0\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha-\gamma/2\\\beta\\3\gamma/2\end{bmatrix}_{\{|v_i\rangle\}} \Rightarrow \begin{cases}\alpha-\gamma/2=0\\\beta=0\\3\gamma/2=2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha-\gamma/2=0\\\beta=0\\\gamma=4/3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=2/3\\\beta=0\\\gamma=4/3\end{cases} \Leftrightarrow \mathscr{D}^\dagger|v_2\rangle = \left[\hat{D}^\dagger\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}|v_2\rangle = \frac{2}{3}|v_1\rangle + 0|v_2\rangle + \frac{4}{3}|v_3\rangle$$

$$\mathscr{D}^\dagger|v_3\rangle = \left[\hat{D}^\dagger\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}|v_3\rangle = \begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&2&0\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\0\\3\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\cdot(-1)+0\cdot0+0\cdot3\\1\cdot(-1)+0\cdot0+0\cdot3\\0\cdot(-1)+2\cdot0+0\cdot3\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix} = -\frac{1}{2}|v_2\rangle$$

$$= 0|v_1\rangle - \frac{1}{2}|v_2\rangle + 0|v_3\rangle$$

Из горње три формуле репрезентовања добија се матрица којом се представља адјунговани диференцијални оператор у базису $\left\{1, t, (3t^2-1)/2\right\}$

$$\mathscr{D}^\dagger = \left[\hat{D}^\dagger\right]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix}0&2/3&0\\1&0&-1/2\\0&4/3&0\end{bmatrix}.$$

(6.8) Показати да је у $\mathbb{L}(\mathbb{U},\mathbb{U})$, где је $\mathbb{U}$ унитарни простор (линеарни векторски простор са дефинисаним скаларним производом), један од могућих скаларних производа дефинисан формулом

$$\left\langle \hat{X} \middle| \hat{Y} \right\rangle \stackrel{\mathrm{d}}{=} \mathrm{Tr}(\hat{X}^{\dagger}\hat{Y}) .$$

Какав је оператор $\hat{A}$ ако је $\left\langle \hat{A} \middle| \hat{A} \right\rangle = \hat{0}$?

Траг квадратне матрице $\mathscr{A} = [a_{ij}]$ дефинисан је као сума свих дијагоналних матричних елемената исте

$$\mathrm{Tr}\,\mathscr{A} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \left\langle v_i \middle| \hat{A} v_i \right\rangle \equiv \sum_{i=1}^{n} \langle v_i | \hat{A} | v_i \rangle .$$

Сада треба проверити да ли у поставци задатка дефинисана формула заиста испуњава све особине скаларног производа.

i) Особина *ермитске симетрије*

$$\left\langle \hat{X} \middle| \hat{Y} \right\rangle \stackrel{\mathrm{d}}{=} \mathrm{Tr}(\hat{X}^{\dagger}\hat{Y}) = \sum_{i=1}^{n} \left\langle v_i \middle| \hat{X}^{\dagger}\hat{Y}\, v_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \left\langle (\hat{X}^{\dagger}\hat{Y})^{\dagger} v_i \middle| v_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \left\langle (\hat{Y})^{\dagger} (\hat{X}^{\dagger})^{\dagger} v_i \middle| v_i \right\rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \hat{Y}^{\dagger}\hat{X}\, v_i \middle| v_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \left\langle v_i \middle| \hat{Y}^{\dagger}\hat{X}\, v_i \right\rangle^{*} = \mathrm{Tr}^{*}(\hat{Y}^{\dagger}\hat{X}) = \left\langle \hat{Y} \middle| \hat{X} \right\rangle^{*}$$

задатог скаларног производа је испуњена.

ii+iii) Особина *дистрибутивности* скаларног производа у односу на сабирање по другом фактору

$$\left\langle \hat{X} \middle| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \hat{Y}_j \right\rangle \stackrel{\mathrm{d}}{=} \mathrm{Tr}\left(\hat{X}^{\dagger} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \hat{Y}_j \right) = \sum_{i=1}^{m} \left\langle v_i \middle| \hat{X}^{\dagger} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \hat{Y}_j\, v_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} \left\langle v_i \middle| \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{X}^{\dagger} \alpha_j \hat{Y}_j \right) v_i \right\rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \left\langle v_i \middle| \sum_{j=1}^{n} \hat{X}^{\dagger} \alpha_j \hat{Y}_j\, v_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left\langle v_i \middle| \hat{X}^{\dagger} \alpha_j \hat{Y}_j\, v_i \right\rangle$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{i=1}^{m} \left\langle v_i \middle| \hat{X}^{\dagger} \hat{Y}_j\, v_i \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathrm{Tr}(\hat{X}^{\dagger}\hat{Y}_j) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left\langle \hat{X} \middle| \hat{Y}_j \right\rangle$$

такође важи.

iv) Особина *ненегативности* скаларног производа

$$\left\langle \hat{X} \middle| \hat{X} \right\rangle \stackrel{\mathrm{d}}{=} \mathrm{Tr}(\hat{X}^{\dagger}\hat{X}) = \sum_{i=1}^{n} \left\langle v_i \middle| \hat{X}^{\dagger}\hat{X} v_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \left\langle (\hat{X}^{\dagger})^{\dagger} v_i \middle| \hat{X} v_i \right\rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \hat{X} v_i \middle| \hat{X} v_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \left\| \hat{X} | v_i \rangle \right\|^{2} \geq 0$$

Такође, задати скаларни производ једнак је нули када је

$$\left\langle \hat{X} \middle| \hat{X} \right\rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Tr}(\hat{X}^{\dagger}\hat{X}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \sum_{i=1}^{n} \left\langle v_i \middle| \hat{X}^{\dagger}\hat{X} v_i \right\rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow\; \sum_{i=1}^{n} \left\langle (\hat{X}^{\dagger})^{\dagger} v_i \middle| \hat{X} v_i \right\rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; \sum_{i=1}^{n} \left\langle \hat{X} v_i \middle| \hat{X} v_i \right\rangle = 0 \;\Rightarrow\; \hat{X}\left| v_i \right\rangle = \left| 0 \right\rangle \;\Rightarrow\; \hat{X} = \hat{0}$$

како и треба да буде.

Значи да је датом формулом заиста представљен један скаларни производ.

(6.9) Доказати да је

$$\mathrm{Tr}(\hat{A}_1\hat{A}_2\ldots\hat{A}_n)$$

инваријантан у односу на цикличне пермутације координата.

Траг једног оператора $\hat{A}$ дефинисан је као сума

$$\mathrm{Tr}\,\hat{A} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \sum_{i=1}^{n}\left\langle \mathrm{e}_i \middle| \hat{A}\mathrm{e}_i \right\rangle.$$

Траг производа n оператора према дефиницији мора бити једнак

$$\mathrm{Tr}(\hat{A}_1\hat{A}_2\ldots\hat{A}_n) = \sum_{i=1}^{n}\left\langle \mathrm{e}_i \middle| \hat{A}_1\hat{A}_2\ldots\hat{A}_n\,\mathrm{e}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\left\langle \mathrm{e}_i \middle| \hat{A}_1(\hat{A}_2\ldots\hat{A}_n)\,\mathrm{e}_i \right\rangle.$$

На основу дефиниције адјунгованог оператора, први оператор у производу оператора може се пребацити у први фактор

$$\mathrm{Tr}(\hat{A}_1\hat{A}_2\ldots\hat{A}_n) = \sum_{i=1}^{n}\left\langle \hat{A}_1^\dagger\mathrm{e}_i \middle| (\hat{A}_2\ldots\hat{A}_n)\,\mathrm{e}_i \right\rangle.$$

Скаларни производ два произвољна вектора може се написати, на основу њиховог Фурије-овог развоја по базисним векторима, као

$$\begin{aligned}\langle v_1|v_2\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n}\xi_i\mathrm{e}_i \middle| \sum_{j=1}^{n}\eta_j\mathrm{e}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\xi_i^*\left\langle \mathrm{e}_i \middle| \sum_{j=1}^{n}\eta_j\mathrm{e}_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_i^*\eta_j\left\langle \mathrm{e}_i \middle| \mathrm{e}_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^*\eta_j\,\delta_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\xi_j^*\eta_j\end{aligned}$$

Сад, коефицијенти Фуријевог развоја могу се представити као

$$\left\langle \mathrm{e}_j \middle| v_1 \right\rangle = \left\langle \mathrm{e}_j \middle| \sum_{i=1}^{n}\xi_i\mathrm{e}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\xi_i\left\langle \mathrm{e}_j \middle| \mathrm{e}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\xi_i\,\delta_{ij} = \xi_j\,,$$

$$\left\langle \mathrm{e}_j \middle| v_2 \right\rangle = \left\langle \mathrm{e}_j \middle| \sum_{i=1}^{n}\eta_i\mathrm{e}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\eta_i\left\langle \mathrm{e}_j \middle| \mathrm{e}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\eta_i\,\delta_{ij} = \eta_j\,,$$

те скаларни производ два произвољна вектора поприма следећи облик

$$\langle v_1|v_2\rangle = \sum_{j=1}^{n}\left\langle \mathrm{e}_j \middle| v_1 \right\rangle^*\left\langle \mathrm{e}_j \middle| v_2 \right\rangle = \sum_{j=1}^{n}\left\langle v_1 \middle| \mathrm{e}_j \right\rangle\left\langle \mathrm{e}_j \middle| v_2 \right\rangle.$$

Применом ове формуле на последњи израз за траг производа оператора, уз узимање у обзир раније већ показаних особина адјунгованих оператора, добија се

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\hat{A}_1\hat{A}_2\ldots\hat{A}_n) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left\langle \hat{A}_1^\dagger\mathrm{e}_i \middle| \mathrm{e}_j \right\rangle\left\langle \mathrm{e}_j \middle| (\hat{A}_2\ldots\hat{A}_n)\,\mathrm{e}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left\langle \mathrm{e}_i \middle| \hat{A}_1\mathrm{e}_j \right\rangle\left\langle (\hat{A}_2\ldots\hat{A}_n)^\dagger\,\mathrm{e}_j \middle| \mathrm{e}_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left\langle \mathrm{e}_i \middle| \hat{A}_1\mathrm{e}_j \right\rangle\left\langle \hat{A}_n^\dagger\ldots\hat{A}_2^\dagger\,\mathrm{e}_j \middle| \mathrm{e}_i \right\rangle = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left\langle \hat{A}_n^\dagger\ldots\hat{A}_2^\dagger\,\mathrm{e}_j \middle| \mathrm{e}_i \right\rangle\left\langle \mathrm{e}_i \middle| \hat{A}_1\mathrm{e}_j \right\rangle\end{aligned}$$

Применом формуле за скаларни производ два произвољна вектора у обрнутом смеру (неми индекс j се мења са i, што не мења суме)

$$\sum_{i=1}^{n} \langle v_1 | \mathrm{e}_i \rangle \langle \mathrm{e}_i | v_2 \rangle = \langle v_1 | v_2 \rangle$$

следи

$$\mathrm{Tr}(\hat{A}_1 \hat{A}_2 \ldots \hat{A}_n) = \sum_{j=1}^{n} \left\langle \hat{A}_n^\dagger \ldots \hat{A}_2^\dagger \, \mathrm{e}_j \,\middle|\, \hat{A}_1 \mathrm{e}_j \right\rangle .$$

Преостало је још да се пребаце сви адјунговани оператори појединачно из првог фактора скаларног производа у други, чиме се добија

$$\mathrm{Tr}(\hat{A}_1 \hat{A}_2 \ldots \hat{A}_n) = \sum_{j=1}^{n} \left\langle \hat{A}_{n-1}^\dagger \ldots \hat{A}_2^\dagger \, \mathrm{e}_j \,\middle|\, \hat{A}_n \hat{A}_1 \mathrm{e}_j \right\rangle = \ldots = \sum_{j=1}^{n} \left\langle \mathrm{e}_j \,\middle|\, \hat{A}_2 \ldots \hat{A}_n \hat{A}_1 \mathrm{e}_j \right\rangle .$$

Последњи израз је према дефиницији трага, једнак

$$\mathrm{Tr}(\hat{A}_1 \hat{A}_2 \ldots \hat{A}_n) = \mathrm{Tr}(\hat{A}_2 \ldots \hat{A}_n \hat{A}_1) ,$$

чиме је показано да је траг производа оператора *инваријантан* у односу на пермутацију првог оператора у производу. Исти такав ће остати и за преостале пермутације.

(6.10) Нека су оператори $\hat{A}$ и $\hat{B}$ ермитски оператори.

(а) Показати да је израз

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \hat{0}$$

потребан и довољан услов да $\hat{A}\hat{B}$ буде *ермитски* оператор;

(б) Показати да су $\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ и $i(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})$ *ермитски* оператори.

(а) Да ли је $\hat{A}\hat{B}$ ермитски оператор? Да би то био, мора да важи израз

$$(\hat{A}\hat{B})^{\dagger} = \hat{A}\hat{B}\,.$$

који је, на основу већ доказане особине производа адјунгованих оператора, једнак

$$\hat{B}^{\dagger}\hat{A}^{\dagger} = \hat{A}\hat{B}$$

Како је у поставци задатка речено да су оба оператора ермитски, мора бити

$$\hat{A}^{\dagger} = \hat{A} \quad \text{и} \quad \hat{B}^{\dagger} = \hat{B}\,,$$

одакле следи да је

$$\hat{B}\hat{A} = \hat{A}\hat{B}\,,$$

што се може записати као

$$\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = \hat{0}$$

односно, комутатор два оператора мора бити једнак нултом оператору

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \hat{0}\,.$$

(б) Прво, да ли је $\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ ермитски оператор? Прво се адјунгује дати збир производа два оператора, који, према раније доказаној особини адјунгованих оператора да је адјунговани збир оператора једнак збиру адјунгованих оператора, мора бити

$$(\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A})^{\dagger} = (\hat{A}\hat{B})^{\dagger} + (\hat{B}\hat{A})^{\dagger}$$

На основу доказане особине (а) у овом задатку, јесте

$$(\hat{A}\hat{B})^{\dagger} = \hat{A}\hat{B}\,,$$

као и, наравно

$$(\hat{B}\hat{A})^{\dagger} = \hat{B}\hat{A}\,,$$

те је онда

$$(\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A})^{\dagger} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}\,,$$

чиме је показано да оператор $\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ заиста јесте *ермитски*.

Друго, да би се показало да је оператор $i(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A})$ ермитски, он се мора прво адјунговати. На основу доказане особине да је адјунговани производ скалара и оператора једнак производу комплексно коњугованог скалара и адјунгованог оператора, биће

$$\left[i(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A})\right]^{\dagger}=i^{*}(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A})^{\dagger}.$$

Како је адјунгована разлика оператора једнака разлици адјунгованих оператора, израз поприма следећи облик

$$\left[i(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A})\right]^{\dagger}=-i\left[(\hat{A}\hat{B})^{\dagger}-(\hat{B}\hat{A})^{\dagger}\right]$$

Опет на основу доказане особине (а) у овом задатку, зна се да је

$$(\hat{A}\hat{B})^{\dagger}=\hat{A}\hat{B} \quad \text{и} \quad (\hat{B}\hat{A})^{\dagger}=\hat{B}\hat{A},$$

те ће бити

$$\left[i(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A})\right]^{\dagger}=-i(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}),$$

одакле се види да оператор $i(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A})$ *није ермитски*.

(6.11) Ако је $\hat{A}$ ермитски оператор, показати да је, за сваки оператор $\hat{B}$, оператор $\hat{B}^{\dagger}\hat{A}\hat{B}$ такође ермитски.

И обрнуто, ако је оператор $\hat{B}^{\dagger}\hat{A}\hat{B}$ ермитски, а оператор $\hat{B}$ инверзни оператор (такав да важи $\hat{B}^{-1}\hat{B} = \hat{B}\hat{B}^{-1} = \hat{I}$), показати да је оператор $\hat{A}$ *ермитски* оператор.

Као прво, да би оператор $\hat{B}^{\dagger}\hat{A}\hat{B}$ био ермитски, мора да важи израз $(\hat{B}^{\dagger}\hat{A}\hat{B})^{\dagger} = \hat{B}^{\dagger}\hat{A}\hat{B}$, што ће сада бити проверено. На основу раније доказане особине да је адјунговани производ два оператора производ два адјунгована оператора обрнутог редоследа биће

$$(\hat{B}^{\dagger}\hat{A}\hat{B})^{\dagger} = \left(\hat{B}^{\dagger}(\hat{A}\hat{B})\right)^{\dagger} = (\hat{A}\hat{B})^{\dagger}(\hat{B}^{\dagger})^{\dagger}.$$

Након примене исте особине на производ прва два оператора, уз узимање у обзир особине да је двапут адјунговани оператор једнак себи неадјунгованом, следи

$$(\hat{B}^{\dagger}\hat{A}\hat{B})^{\dagger} = \hat{B}^{\dagger}\hat{A}^{\dagger}\hat{B}.$$

Како је у поставци задатка речено да је оператор $\hat{A}$ ермитски ($\hat{A}^{\dagger} = \hat{A}$), мора бити

$$(\hat{B}^{\dagger}\hat{A}\hat{B})^{\dagger} = \hat{B}^{\dagger}\hat{A}\hat{B},$$

чиме је прво тврђење доказано.

Сад обрнуто, ако је оператор $\hat{B}^{\dagger}\hat{A}\hat{B}$ ермитски онда мора да важи израз

$$(\hat{B}^{\dagger}\hat{A}\hat{B})^{\dagger} = \hat{B}^{\dagger}\hat{A}\hat{B}.$$

Горњи израз се може написати и као

$$\left(\hat{B}^{\dagger}(\hat{A}\hat{B})\right)^{\dagger} = \hat{B}^{\dagger}\hat{A}\hat{B},$$

што омогућава примену раније доказане особине да је адјунговани производ два оператора производ два адјунгована оператора обрнутог редоследа

$$(\hat{A}\hat{B})^{\dagger}(\hat{B}^{\dagger})^{\dagger} = \hat{B}^{\dagger}\hat{A}\hat{B}.$$

Након примене исте особине на производ прва два оператора, уз узимање у обзир особине да је двапут адјунговани оператор једнак себи неадјунгованом

$$\hat{B}^{\dagger}\hat{A}^{\dagger}\hat{B} = \hat{B}^{\dagger}\hat{A}\hat{B}.$$

Сада треба узети у обзир особину инверзних оператора да је $\hat{B}^{\dagger} = \hat{B}^{-1}$, одакле следи

$$\hat{B}^{-1}\hat{A}^{\dagger}\hat{B} = \hat{B}^{-1}\hat{A}\hat{B}.$$

Множењем горњег израза слева оператором $\hat{B}$, добија се

$$\hat{B}\hat{B}^{-1}\hat{A}^{\dagger}\hat{B} = \hat{B}\hat{B}^{-1}\hat{A}\hat{B}$$

односно, пошто је $\hat{B}\hat{B}^{-1} = \hat{I}$, биће

$$\hat{A}^{\dagger}\hat{B} = \hat{A}\hat{B}.$$

Следи још једно множење здесна оператором $\hat{B}^{-1}$, што даје

$$\hat{A}^{\dagger}\hat{B}\hat{B}^{-1} = \hat{A}\hat{B}\hat{B}^{-1},$$

а како је $\hat{B}\hat{B}^{-1} = \hat{I}$, добија се коначно да је

$$\hat{A}^{\dagger} = \hat{A}$$

што значи да је оператор $\hat{A}$ заиста *ермитски* оператор.

(6.12) Ако је $\hat{A}$ ермитски оператор, и ако важи да је $\hat{A}^2|v\rangle = |0\rangle$, показати да онда, за сваки вектор $|v\rangle$, важи да је $\hat{A}|v\rangle = |0\rangle$.

На основу задате формуле уобличи се скаларни производ, тако што се формула скаларно помножи слева произвољним вектором

$$\left\langle \tilde{v} \middle| \hat{A}^2 v \right\rangle = \langle \tilde{v} | 0 \rangle .$$

Пошто је скаларни производ ма ког вектора са нултим вектором једнак нули, следи

$$\left\langle \tilde{v} \middle| \hat{A}\hat{A} v \right\rangle = 0 .$$

На основу дефиниције адјунгованог оператора биће

$$\left\langle \hat{A}^\dagger \tilde{v} \middle| \hat{A} v \right\rangle = 0 .$$

Ако се претпостави да су вектори у скаларном производу једнаки, биће

$$\left\langle \hat{A}^\dagger v \middle| \hat{A} v \right\rangle = 0 ,$$

а како је оператор $\hat{A}$ према поставци задатка ермитски ($\hat{A}^\dagger = \hat{A}$), то је

$$\left\langle \hat{A} v \middle| \hat{A} v \right\rangle = 0 .$$

На основу четврте дефиниционе особине скаларног производа, скаларни производ једнак је нули ако су вектори у његовим факторима једнаки нултом вектору, одакле следи да је

$$\hat{A}|v\rangle = |0\rangle .$$

(6.13) Показати да се сваки линеарни оператор може на јединствен начин представити у облику

$$\hat{A} = \hat{E}_1 + i\hat{E}_2$$

где су $\hat{E}_1$ и $\hat{E}_2$ ермитски оператори.

Такође показати да је оператор $\hat{A}$ *нормалан* $\hat{A}\hat{A}^\dagger = \hat{A}^\dagger\hat{A}$ акко оператори $\hat{E}_1$ и $\hat{E}_2$ комутирају: $\hat{E}_1\hat{E}_2 = \hat{E}_2\hat{E}_1$.

Прво треба показати да се произвољни оператор $\hat{A}$ може написати као што је дато у поставци задатка

$$\hat{A} = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{A}}{2} + \hat{0} = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{A}^\dagger}{2} - \frac{\hat{A}^\dagger}{2} = \frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{A}^\dagger) + \frac{1}{2}(\hat{A} - \hat{A}^\dagger)$$
$$= \frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{A}^\dagger) - \frac{i^2}{2}(\hat{A} - \hat{A}^\dagger) = \frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{A}^\dagger) + i\left[\frac{-i}{2}(\hat{A} - \hat{A}^\dagger)\right]$$

Нека је први члан једнак оператору $\hat{E}_1$, а други оператору $\hat{E}_2$. Сада треба проверити да ли су они ермитски оператори. Да би то били, морају да важе изрази $\hat{E}_1^\dagger = \hat{E}_1$ и $\hat{E}_2^\dagger = \hat{E}_2$

$$\hat{E}_1^\dagger = \left[\frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{A}^\dagger)\right]^\dagger = \frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{A}^\dagger)^\dagger = \frac{1}{2}\left[\hat{A}^\dagger + (\hat{A}^\dagger)^\dagger\right] = \frac{1}{2}(\hat{A}^\dagger + \hat{A}) = \frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{A}^\dagger) = \hat{E}_1,$$

$$\hat{E}_2^\dagger = \left[\frac{-i}{2}(\hat{A} - \hat{A}^\dagger)\right]^\dagger = \frac{(-i)^*}{2}(\hat{A} - \hat{A}^\dagger)^\dagger = \frac{i}{2}\left[\hat{A}^\dagger - (\hat{A}^\dagger)^\dagger\right] = \frac{i}{2}(\hat{A}^\dagger - \hat{A}) = \frac{-i}{2}(\hat{A} - \hat{A}^\dagger) = \hat{E}_2.$$

Значи, горе дефинисана два оператора јесу ермитски оператори.

Сада треба проверити да ли је горњи израз једнистvен. Стога ће бити претпостављено да постоје два могућа израза

$$\hat{A} = \hat{E}_1 + i\hat{E}_2 \quad \text{и} \quad \hat{A} = \hat{E}_1' + i\hat{E}_2'.$$

Пошто је реч о истом оператору, десне стране горња два израза могу се изједначити

$$\hat{E}_1' + i\hat{E}_2' = \hat{E}_1 + i\hat{E}_2 \;\Leftrightarrow\; \hat{E}_1' - \hat{E}_1 + i\hat{E}_2' - i\hat{E}_2 = \hat{0},$$

одакле следи да је

$$(\hat{E}_1' - \hat{E}_1) + i(\hat{E}_2' - \hat{E}_2) = \hat{0}.$$

Сада се горњи израз може адјунговати, чиме се добија

$$\left[\hat{E}_1' - \hat{E}_1 + i(\hat{E}_2' - \hat{E}_2)\right]^\dagger = \hat{0}^\dagger \;\Leftrightarrow\; (\hat{E}_1' - \hat{E}_1)^\dagger - i(\hat{E}_2' - \hat{E}_2)^\dagger = \hat{0} \;\Leftrightarrow\; (\hat{E}_1'^\dagger - \hat{E}_1^\dagger) - i(\hat{E}_2'^\dagger - \hat{E}_2^\dagger) = \hat{0}.$$

Како је већ показано, оператори $\hat{E}_1$ и $\hat{E}_2$ су ермитски оператори, те следи израз

$$(\hat{E}_1' - \hat{E}_1) - i(\hat{E}_2' - \hat{E}_2) = \hat{0}.$$

Сада се оба добијена израза могу одузети међусобно, што даје

$$(\hat{E}_1' - \hat{E}_1) + i(\hat{E}_2' - \hat{E}_2) - (\hat{E}_1' - \hat{E}_1) + i(\hat{E}_2' - \hat{E}_2) = \hat{0} - \hat{0}$$
$$\Leftrightarrow (\cancel{\hat{E}_1'} - \cancel{\hat{E}_1'} - \cancel{\hat{E}_1} + \cancel{\hat{E}_1}) + 2i(\hat{E}_2' - \hat{E}_2) = \hat{0} \Rightarrow 2i(\hat{E}_2' - \hat{E}_2) = \hat{0} \Rightarrow \hat{E}_2' = \hat{E}_2$$

Ако се сада овај израз врати у први, добија се

$$(\hat{E}_1' - \hat{E}_1) + i(\hat{E}_2 - \hat{E}_2) = \hat{0} \Rightarrow \hat{E}_1' - \hat{E}_1 = \hat{0} \Leftrightarrow \hat{E}_1' = \hat{E}_1 .$$

Задња добијена два израза показују да је разлагање произвољног оператора на два ермитска јединствено.

Сада треба показати да је оператор $\hat{A} = \hat{E}_1 + i\hat{E}_2$ нормалан ако ермитски оператори $\hat{E}_1$ и $\hat{E}_2$ у његовом развоју комутирају. У ту сврху се поменути оператор помножи са себи адјунгованим оператором $\hat{A}^\dagger = \hat{E}_1 - i\hat{E}_2$ прво здесна

$$\begin{aligned}\hat{A}\hat{A}^\dagger &= (\hat{E}_1 + i\hat{E}_2)(\hat{E}_1 - i\hat{E}_2) = \hat{E}_1\hat{E}_1 + i\hat{E}_2\hat{E}_1 - \hat{E}_1 i\hat{E}_2 - i\hat{E}_2 i\hat{E}_2 \\ &= \hat{E}_1^2 + i\hat{E}_2\hat{E}_1 - i\hat{E}_1\hat{E}_2 - i^2\hat{E}_2^2 = \hat{E}_1^2 + \hat{E}_2^2 + i(\hat{E}_2\hat{E}_1 - \hat{E}_1\hat{E}_2)\end{aligned}$$

У поставци задатка је речено да оператори $\hat{E}_1$ и $\hat{E}_2$ комутирају: $\hat{E}_1\hat{E}_2 = \hat{E}_2\hat{E}_1$, па ће бити

$$\hat{A}\hat{A}^\dagger = \hat{E}_1^2 + \hat{E}_2^2 .$$

Потом се оператор $\hat{A} = \hat{E}_1 + i\hat{E}_2$ помножи себи адјунгованим $\hat{A}^\dagger = \hat{E}_1 - i\hat{E}_2$ слева

$$\begin{aligned}\hat{A}^\dagger\hat{A} &= (\hat{E}_1 - i\hat{E}_2)(\hat{E}_1 + i\hat{E}_2) = \hat{E}_1\hat{E}_1 - i\hat{E}_2\hat{E}_1 + \hat{E}_1 i\hat{E}_2 - i\hat{E}_2 i\hat{E}_2 \\ &= \hat{E}_1^2 + i(\hat{E}_1\hat{E}_2 - \hat{E}_2\hat{E}_1) - i^2\hat{E}_2^2 = \hat{E}_1^2 + \hat{E}_2^2 + i(\hat{E}_1\hat{E}_2 - \hat{E}_2\hat{E}_1)\end{aligned}$$

Из истог разлога као и малопре, добија се да је

$$\hat{A}^\dagger\hat{A} = \hat{E}_1^2 + \hat{E}_2^2 .$$

Како су десне стране два потребна израза једнаке, морају бити једнаке и леве

$$\hat{A}\hat{A}^\dagger = \hat{A}^\dagger\hat{A}$$

те је оператор $\hat{A}$ заиста *нормалан* оператор; наравно, само под условом да ермитски оператори који фигуришу у његовом развоју међусобно комутирају.

(6.14) Показати да су ниже наведене особине линеарних оператора еквивалентне, те да се свака од њих може узети за дефиницију *позитивног* оператора

(а) $\left\langle v \middle| \hat{A} v \right\rangle \geq 0$, $\forall \left| v \right\rangle$; самим тим је оператор $\hat{A}$ ермитски;

(б) постоји ермитски оператор $\hat{B}$ такав да је $\hat{B} = \hat{A}^2$;

(в) постоји линеаран оператор $\hat{C}$ такав да је $\hat{C}^{\dagger} \hat{C} = \hat{A}$.

(б) $\Rightarrow$ (в): Полазећи од особине (б), може се показати да важи особина (в); значи, узима се да постоји оператор $\hat{B}$ такав да је

$$\hat{A} = \hat{B}^2,$$

што се може написати и као

$$\hat{A} = \hat{B} \hat{B}.$$

Како је поменути оператор ермитски: $\hat{B} = \hat{B}^{\dagger}$, то се један од оператора са десне стране горњег израза може заменити својим адјунгованим оператором

$$\hat{A} = \hat{B}^{\dagger} \hat{B}.$$

Како су ермитски оператори подскуп линеарних оператора, то је ермитски оператор $\hat{B}$ свакако линеаран, те се може заменити оператором $\hat{C}$, чиме се добија особина (в)

$$\hat{A} = \hat{C}^{\dagger} \hat{C}.$$

(в) $\Rightarrow$ (а): Из показане особине (в) може се добити особина (а)

$$\left\langle v \middle| \hat{A} v \right\rangle = \left\langle v \middle| \hat{C}^{\dagger} \hat{C} v \right\rangle.$$

На основу дефиниционе особине адјунгованих оператора је

$$\left\langle v \middle| \hat{A} v \right\rangle = \left\langle \hat{C} v \middle| \hat{C} v \right\rangle,$$

где скаларни производ са десне стране по дефиницији представља квадрат норме вектора, који наравно може бити само већи или једнак нули

$$\left\langle v \middle| \hat{A} v \right\rangle = \left\| \left| \hat{C} v \right\rangle \right\|^2 \geq 0.$$

(а) $\Rightarrow$ (б): Сада се на основу показане особине (а) може показати да важи и особина (б); наиме, како је $\hat{A}$ ермитски оператор, његове својствене вредности морају бити *реалне*. Услов

$$\left\langle v \middle| \hat{A} v \right\rangle \geq 0$$

намеће *ненегативност* својствених вредности, те ће спектрална форма оператора имати облик

$$\hat{A} = \sum_{i=1}^{n} a_i \hat{P}_i$$

где су a_i ненегативни бројеви. У том случају оператор $\hat{B}$ једнозначно је дефинисан

$$\hat{B} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i}\, \hat{P}_i \,,$$

ермитски је и важи да је $\hat{A} = \hat{B}^2$.

(6.15) Нека је $\hat{A}$ линеаран оператор у $\mathbb{U}$. Показати да је пресликавање парова вектора, дефинисано као

$$f_A\left(|v_1\rangle,|v_2\rangle\right)\stackrel{\mathrm{d}}{=}\left\langle v_1\middle|\hat{A}v_2\right\rangle$$

такође један скаларни производ, акко је оператор $\hat{A}$ *строго позитиван*.

Да би према горе дати израз представљао скаларни производ, он би морао да задовољава аксиоме скаларног производа.

i) Први од аксиома јесте *ермитска симетрија* скаларног производа

$$f_A\left(|v_1\rangle,|v_2\rangle\right)\stackrel{\mathrm{d}}{=}\left\langle v_1\middle|\hat{A}v_2\right\rangle.$$

Пошто је израз на десној страни скаларни производ, за њега ермитска симетрија мора да важи, те се добија

$$f_A\left(|v_1\rangle,|v_2\rangle\right)=\left\langle \hat{A}v_2\middle|v_1\right\rangle^*.$$

На основу дефиниције адјунгованих оператора, може да се напише

$$f_A\left(|v_1\rangle,|v_2\rangle\right)=\left\langle v_2\middle|\hat{A}^\dagger v_1\right\rangle^*.$$

Будући да је оператор $\hat{A}$ строго позитиван, он је и ермитски: $\hat{A}^\dagger=\hat{A}$, те следи

$$f_A\left(|v_1\rangle,|v_2\rangle\right)=\left\langle v_2\middle|\hat{A}v_1\right\rangle^*,$$

што је према задатој дефиницији једнако

$$f_A\left(|v_1\rangle,|v_2\rangle\right)=f_A^*\left(|v_2\rangle,|v_1\rangle\right).$$

ii) Други од аксиома јесте *дистрибутивност* скаларног производа у односу на сабирање по другом фактору. На основу задате дефиниције може се писати

$$f_A\left(|v_1\rangle,|v_2\rangle+|v_3\rangle\right)\stackrel{\mathrm{d}}{=}\left\langle v_1\middle|\hat{A}\left(|v_2\rangle+|v_3\rangle\right)\right\rangle.$$

Познато је да оператор делује на збир два вектора тако што делује на сваки од њих понаособ, па се тако добијени ликови сабирају

$$f_A\left(|v_1\rangle,|v_2\rangle+|v_3\rangle\right)=\left\langle v_1\middle|\hat{A}|v_2\rangle+\hat{A}|v_3\rangle\right\rangle.$$

Израз на десној страни јесте скаларни производ те за њега мора важити дистрибутивност

$$f_A\left(|v_1\rangle,|v_2\rangle+|v_3\rangle\right)=\left\langle v_1\middle|\hat{A}v_2\right\rangle+\left\langle v_1\middle|\hat{A}v_3\right\rangle.$$

На основу задате дефиниције, добија се да је коначно

$$f_A\left(|v_1\rangle,|v_2\rangle+|v_3\rangle\right)=f_A\left(|v_1\rangle,|v_2\rangle\right)+f_A\left(|v_1\rangle,|v_3\rangle\right).$$

iii) Трећи од аксиома јесте *антилинеарност* скаларног производа у односу на множење скаларом по првом фактору

$$f_A\left(\alpha|v_1\rangle,|v_2\rangle\right)\overset{\mathrm{d}}{=}\left\langle \alpha v_1\middle|\hat{A}v_2\right\rangle.$$

Како је израз на десној страни скаларни производ, он јесте антилинеаран, те ће бити

$$f_A\left(\alpha|v_1\rangle,|v_2\rangle\right)=\alpha^*\left\langle v_1\middle|\hat{A}v_2\right\rangle.$$

Опет на основу дефиниције је

$$f_A\left(\alpha|v_1\rangle,|v_2\rangle\right)=\alpha^* f_A\left(|v_1\rangle,|v_2\rangle\right).$$

iv) Четврти аксиом јесте аксиом *позитивности* скаларног производа. Почиње се од задате дефиниције

$$f_A\left(|v\rangle,|v\rangle\right)\overset{\mathrm{d}}{=}\left\langle v\middle|\hat{A}v\right\rangle.$$

Сад, како је према поставци задатка $\hat{A}$ строго позитиван оператор, то је скаларни производ произвољног вектора и лика тог вектора већи или једнак нули: $\left\langle v\middle|\hat{A}v\right\rangle\geq 0$, те је онда

$$f_A\left(|v\rangle,|v\rangle\right)\geq 0.$$

Како су све четири аксиоме скаларног производа задовољене, то значи да задата формула представља скаларни производ.

(6.16) Какав је позитиван оператор ако му је *траг* једнак нули?

Према поставци задатка, траг оператора једнак је нули

$$\mathrm{Tr}\,\hat{A} = 0 .$$

Према дефиницији, траг је једнак

$$\sum_{i=1}^{n} \left\langle v_i \middle| \hat{A} v_i \right\rangle = 0$$

илити

$$\left\langle v_1 \middle| \hat{A} v_1 \right\rangle + \left\langle v_2 \middle| \hat{A} v_2 \right\rangle + \ldots + \left\langle v_n \middle| \hat{A} v_n \right\rangle = 0 .$$

Будући да је оператор $\hat{A}$ строго позитиван, мора да важи израз: $\left\langle v \middle| \hat{A} v \right\rangle \geq 0$, што значи да сваки од сабирака у горњем изразу мора понаособ бити једнак нули

$$\left\langle v_i \middle| \hat{A} v_i \right\rangle = 0 , \; i = \overline{1, n} .$$

На основу четврте особине позитивности скаларног производа, скаларни производ једнак је нули ако је један од вектора у било ком фактору нулти вектор. Како су вектори $\left| v_i \right\rangle$, $i = \overline{1, n}$ произвољни, то њихови ликови морају бити једнаки нултом вектору, то јест

$$\hat{A} \left| v_i \right\rangle = \left| 0 \right\rangle , \; i = \overline{1, n} .$$

Како су вектори $\left| v_i \right\rangle \neq \left| 0 \right\rangle$, $i = \overline{1, n}$, то следи да оператор $\hat{A}$ мора бити нулти оператор, пошто само он претвара било који вектор у нулти

$$\hat{A} = \hat{0} .$$

Закључак је да оператор који има нулти траг мора бити *нулти оператор*.

(6.17) Показати да је оператор $\hat{A}$ из $\mathbb{L}(\mathbb{U},\mathbb{U})$ *нормалан* акко је

$$\left\| \hat{A}|v\rangle \right\| = \left\| \hat{A}^\dagger |v\rangle \right\|, \ \forall |v\rangle \in \mathbb{U},$$

то јест ако су оператори $\hat{A}$ и $\hat{A}^\dagger$ *изометрички једнаки*.

Креће се од задате једнакости између двају норми

$$\left\| \hat{A}|v\rangle \right\| = \left\| \hat{A}^\dagger |v\rangle \right\|,$$

које су по дефиницији једнаке кореновима скаларних производа

$$\sqrt{\left\langle \hat{A}v \middle| \hat{A}v \right\rangle} = \sqrt{\left\langle \hat{A}^\dagger v \middle| \hat{A}^\dagger v \right\rangle},$$

односно, пошто се коренови могу одбацити

$$\left\langle \hat{A}v \middle| \hat{A}v \right\rangle = \left\langle \hat{A}^\dagger v \middle| \hat{A}^\dagger v \right\rangle.$$

На основу дефиниције адјунгованих оператора биће

$$\left\langle v \middle| \hat{A}^\dagger \hat{A}\, v \right\rangle = \left\langle v \middle| \hat{A}\, \hat{A}^\dagger\, v \right\rangle,$$

илити, еквивалентно

$$\left\langle v \middle| \hat{A}^\dagger \hat{A}\, v \right\rangle - \left\langle v \middle| \hat{A}\, \hat{A}^\dagger\, v \right\rangle = 0.$$

Како је скаларни производ дистрибутиван по другом фактору, следи

$$\left\langle v \middle| \hat{A}^\dagger \hat{A}\, v - \hat{A}\, \hat{A}^\dagger\, v \right\rangle = 0,$$

а како је разлика два лика једнака разлици оператора која делује на објекат, биће

$$\left\langle v \middle| (\hat{A}^\dagger \hat{A} - \hat{A}\, \hat{A}^\dagger) v \right\rangle = 0.$$

Скаларни производ једнак је нули само ако је један од вектора у њему једнак нултом вектору, те ће бити

$$(\hat{A}^\dagger \hat{A} - \hat{A}\, \hat{A}^\dagger)|v\rangle = |0\rangle.$$

Како је вектор $|v\rangle$ произвољан, он у општем случају није нулти вектор, те онда разлика оператора мора бити једнака нултом оператору

$$\hat{A}^\dagger \hat{A} - \hat{A}\, \hat{A}^\dagger = \hat{0},$$

односно

$$\hat{A}^\dagger \hat{A} = \hat{A}\, \hat{A}^\dagger$$

што уствари значи да је оператор $\hat{A}$ *нормалан оператор*.